

Concurs Mate-Info UBB, 13 aprilie 2013  
Proba scrisă la MATEMATICĂ

**SUBIECTUL I (30 puncte)**

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = -1. \end{cases}$$

Discuție după  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Determinați parametrul real  $a$  și rezolvați ecuația

$$x^3 + 3x^2 - x - a = 0,$$

știind că rădăcinile sale sunt în progresie aritmetică.

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația

$$\sqrt[p]{x \sqrt[p]{x \sqrt[p]{x} \dots}} = 2013,$$

unde  $p \geq 2$  este un număr natural, iar numărul radicalilor în ecuație este infinit.

**SUBIECTUL II (30 puncte)**

Se dau în planul  $xOy$  punctele  $A(-1, 0)$  și  $B(1, 0)$ .

1. Să se scrie ecuația dreptei  $d$  paralelă cu axa  $Ox$ , aflată la o distanță de 3 unități deasupra axei.
2. Să se calculeze aria triunghiului  $PAB$ , unde  $P$  este un punct arbitrar pe dreapta  $(d)$  definită mai sus.
3. Să se determine punctul  $M \in d$  pentru care măsura unghiului  $\widehat{MAB}$  este  $\frac{\pi}{6}$ .
4. Să se determine punctul  $Q \in d$  pentru care suma distanțelor  $QA + QB$  este minimă.

**SUBIECTUL III (30 puncte)**

Se consideră funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = |x - 1|\sqrt{x}$ .

1. Să se determine domeniul maxim de definiție  $D$ , precum și mulțimile  $D_c$  și  $D_d$  a punctelor în care funcția  $f$  este continuă, respectiv derivabilă.
2. Să se determine intervalele de monotonie și intervalele de concavitate/convexitate pentru  $f$ , cu precizarea punctelor de extrem local, a punctelor de inflexiune și a punctelor unghiulare ale graficului lui  $f$ .
3. Să se afle aria suprafeței plane delimitată de axa  $Ox$ , graficul funcției și dreptele de ecuație  $x = 0$  și  $x = 1$ .

**NOTĂ**

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**Baremul subiectului de concurs B**  
**Proba de matematică**

**Oficiu:** ..... 10 puncte

**I.** ..... 30 puncte

1. Calculul determinatului  $\det(A) = (a+2)(a-1)^2$  ..... 2 puncte  
Pentru  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$  sistem compatibil determinat ..... 1 punct  
și soluția acestuia ... ..... 4 puncte  
Pentru  $a = -2$  sistem compatibil nedeterminat ..... 1 punct  
și soluția acestuia  $(\frac{3\lambda-2}{3}, \frac{3\lambda-1}{3}, \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ..... 4 puncte  
Pentru  $a = 1$  sistem incompatibil ..... 1 punct
2. Prima relație a lui Viète ..... 1 punct  
Condiția de a fi rădăcinile în progresie aritmetică ..... 2 puncte  
Valoarea lui  $a = 3$  ..... 1 punct  
Rădăcinile ecuației  $-3, -1, 1$  ..... 3 puncte

3. Demonstrarea relațiilor  $\underbrace{\sqrt[p]{x} \sqrt[p]{x} \dots \sqrt[p]{x}}_{n \text{ radicali}} = x^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n}} = x^{\frac{1-\frac{1}{p^n}}{p-1}}$  ..... 4 puncte

Transformarea ecuației inițiale în  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1-\frac{1}{p^n}}{p-1}} = 2013$ . ..... 3 puncte

Forma finală  $x^{\frac{1}{p-1}} = 2013$ . ..... 2 puncte

Soluția  $x = 2013^{p-1}$ . ..... 1 punct

**II.** ..... 30 puncte

1. Ecuația cerută (d)  $y = 3$  ..... 5 puncte
2. Aria căutată (3) ..... 8 puncte
3.  $M(3\sqrt{3} - 1, 3)$  ..... 7 puncte
4. Aflarea punctului  $Q(0, 3)$  ..... 10 puncte

Se poate căuta punctul  $Q(x, 3)$  pentru care suma distanțelor

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 2x + 10}$$

este minimă, de unde  $x = 0$ .

Se poate utiliza definiția elipsei, din care rezultatul este imediat.

**III.** ..... 30 puncte

1.  $D = [0, +\infty)$  (2 p.),  $D_c = (0, +\infty)$  (2 p.),  $D_d = (0, +\infty) \setminus \{1\}$  (4 p.); Total ... 8 puncte

2.  $f$  este crescătoare pe  $[0, \frac{1}{3}]$  și pe  $[1, +\infty)$  și descrescătoare pe  $[\frac{1}{3}, 1]$  ..... 4 puncte

$f$  este concavă pe  $[0, 1]$  și convexă pe  $[1, +\infty)$ ; ..... 6 puncte

Puncte de extrem local:  $x = \frac{1}{3}$  punct de maxim,

$x = 0$  și  $x = 1$  puncte de minim local ..... 3 puncte

Punct de inflexiune  $x = 1$  ..... 2 puncte

Punct unghiular  $x = 1$  ..... 2 puncte

3. Scrierea ariei ..... 1 punct

Calculul integralei  $A = \frac{4}{15}$  ..... 4 puncte